Variáveis aleatórias contínuas

Introdução

- Variável aleatória ***contínua***
  - ***Def***: Uma *v.a.* é ***contínua*** se o seu espaço amostral for ***infinito não numerável***.

- *Exercício*: Quais das seguintes definições são *v. a.* contínuas?

a) X: "Peso de uma lata de café cheia, em gramas".

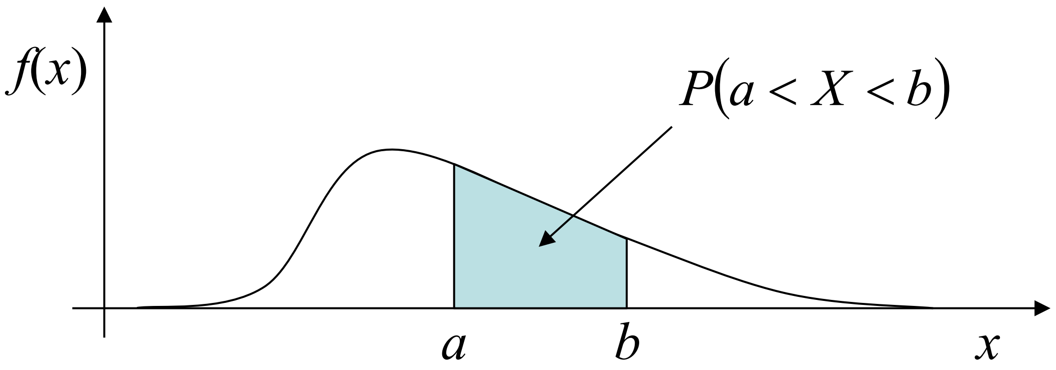
b) X: "Número de veículos avariados em 20".

c) X: "Duração de uma lâmpada de certo modelo, em horas".

d) X: "Número de chamadas, em 10, com duração superior a 1 minuto".

- ***Função densidade de probabilidade (f.d.p.):***
  - ***Def***: A ***f. d. p.*** de uma *v. a.* contínua, X, é uma função, $\boldsymbol{f(x)}$, tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx\,, \quad \forall a, b \in \Re\,,\, a \le b$$



Função densidade de probabilidade

- Propriedades de $f(x)$:

$$i)\quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Re$$

$$ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Notas:

a) $P(X = c) = 0, \quad \forall c \in \Re$

b) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

Exercício

Seja X uma *v.a.* contínua com f.d.p.

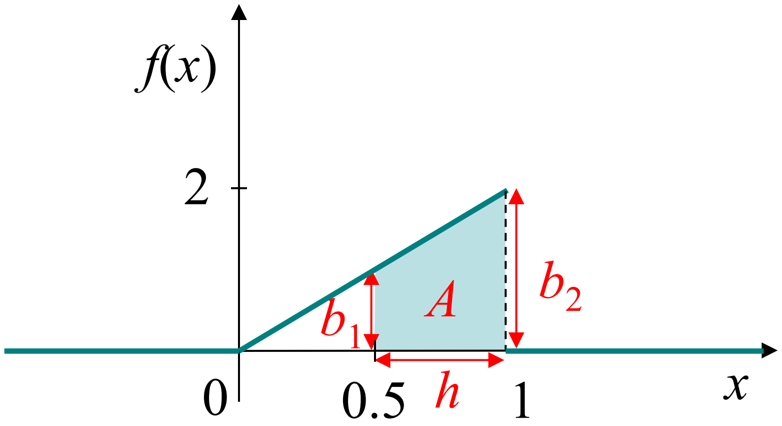
$$f(x)=\begin{cases}2x & ,\ x\in\,]0,1] \\ 0 & ,\ x\notin\,]0,1]\end{cases}$$

Calcule $P(0.5<X<1)$.

$$P(0.5<X<1)=\int_{0.5}^{1} f(x)dx=\int_{0.5}^{1} 2x\,dx=\left[x^2\right]_{0.5}^{1}=0.75$$

Ou, em alternativa:

R: $f <- function(x)\ \{2*x\}$
$integrate(f, 0.5,1)\$value$



$$P(0.5<X<1)=A=\frac{(b_1+b_2)h}{2}=\frac{\left(f(0.5)+f(1)\right)h}{2}=\frac{(1+2)\times 0.5}{2}=0.75$$

Função de distribuição

- *Def*: Seja $f(x)$ a *f.d.p.* de uma *v. a.* contínua, X. A ***função de distribuição***, ***F(x)***, dessa *v. a.* é dada por

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,, \quad \forall x \in \Re$$

Notas:

i) $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

ii) $P(X < a) = P(X \le a) = F(a)$

Porque X é *v. a.* contínua

iii) $F'(x) = f(x)$

Exercício

Seja X uma *v.a.* contínua com a seguinte função de distribuição

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & , 0\le x<2\\ 1 & , x\ge 2\end{cases}$$

Calcule $P(0.5<X<1)$.

$$P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=P(X<1)-P\left(X\le\frac{1}{2}\right)$$

$$=P(X\le 1)-P\left(X\le\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(Porque } X \text{ é } v.\ a. \text{ contínua)}$$

$$=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

Média e variância duma *v.a.* contínua

- *Def*: A ***média ou valor esperado*** duma *v.a.* contínua X é a constante

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

- *Def*: A ***variância*** duma *v.a.* contínua X é a constante

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{(X-\mu)^2\right\} = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

Nota: As ***propriedades*** de $E(X)$ e $V(X)$ apresentadas para *v.a.* discretas também são válidas para *v.a.* contínuas.

- *Def*: O ***desvio padrão*** duma *v.a.* contínua X é a constante

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Exercício

Calcule a média e a variância duma *v.a.* com a seguinte f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , x \in [0,2] \\ 0 & , x \notin [0,2] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

R: $f <- function(x)\ \{x \wedge 2/2\}$
$integrate(f, 0{,}2)\$value$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= \int_0^2 x^2\left(\frac{x}{2}\right) dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{8}\left[x^4\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

R: $f <- function(x)\ \{x \wedge 3/2\}$
$integrate(f, 0{,}2)\$value$

Outros parâmetros duma *v.a.* contínua

- ***Coeficiente de variação*** de uma *v. a.* contínua X
  - ***Def***: É a constante

$$\omega = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

- ***Momentos de ordem r*** de uma *v. a.* contínua X
  - ***Def***: O ***momento centrado de ordem r***, ($r \in \mathbb{N}_0$), de uma *v. a.* contínua é a constante

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx$$

Outros parâmetros duma *v.a.* contínua

- ***Coeficiente de assimetria*** de uma *v. a.* contínua X
  - ***Def***: É a constante

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

  - ***Utilidade***: Mede a *assimetria* da distribuição de probabilidades.

- ***Coeficiente de curtose*** de uma *v. a.* contínua X
  - ***Def***: É a constante

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

  - ***Utilidade***: Mede o *peso das caudas* e o *achatamento* da distribuição de probabilidades.